

۱- فرض کنید $x \neq 0$ ، پس $x < 0$. حال با فرض $\frac{x}{2} = \epsilon$ به رابطه‌ی $0 \leq x < \frac{x}{2}$ می‌رسیم که تناقض است.

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} \quad n \geq M \Rightarrow \left| \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{2^n} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon \quad -2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2^{n-1} + (-1)^n - 2^{n-1}}{2^n} \right| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \epsilon \Rightarrow 2^n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow n > \text{Log} \frac{1}{\epsilon}$$

پس کافی است $M = \left[\text{Log} \frac{1}{\epsilon} \right] + 1$ انتخاب شود.

۳- $\text{Cos} \frac{\pi}{n}$ صعودی و $n^2 + \text{Cos} \frac{\pi}{n}$ نیز صعودی است و چون $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + \text{Cos} \frac{\pi}{n} = \infty$

پس دنباله بی‌کران است.

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(k+1)+k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right) \quad -4 \\ &= \frac{(-1)^2}{1} - \frac{\text{عدد}}{\infty} = 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = 1 - 0 = 1 \quad -5$$

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow f(a_n) = \text{Cos} 2n\pi = 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$$

$$b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow f(b_n) = \text{Cos} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 0 \rightarrow 1 \neq 0 \text{ ندارد} \quad -6$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = [1^+] + [0^+] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = [1^-] + [0^-] = -1 \end{cases} \rightarrow \text{چون } g(1) = 1 \text{، پس فقط پیوستگی راست دارد.} \quad -7$$

۸- کافی است در $t = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، پس:

$$C = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin t - 1}{\cos t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{-x} = 0$$

۹- حد مخرج باید صفر شود و در همسایگی محذوف $x = 3$ باید مثبت باشد پس مخرج باید به صورت $(x - 3)^2$ باشد پس $x^2 + ax + b = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ و از آن جا $a = -6$ و $b = 9$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \pm (x + 1) \begin{cases} y = -1 & \text{افقی} \\ y = 2x + 1 & \text{مایل} \end{cases} \quad -10$$

۱۱- f فقط در $x = 0$ پیوسته است. $f \circ f$ در \mathbb{R} پیوسته است. $f(f(x)) = x \rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \quad -12$$