

۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گزاره یک نادرست می باشد زیرا با توجه به اینکه مقدار قدرمطلق می تواند صفر باشد داریم: $|x - a| = 0 \Rightarrow x = a$ ، پس همسایگی مورد نظر می تواند شامل مقدار a نیز باشد در حالیکه در سایر گزینه ها a بعنوان یک عضو محذوف فاصله است. پس گزینه ۱ پاسخ سوال است.

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $-3 < x < 9 \Rightarrow -6 < x - 3 < 6 \Rightarrow |x - 3| < 6 \Rightarrow (a, b) = (3, 6)$

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} [x^2 - 6x] = 7 &\Rightarrow 7 \leq x^2 - 6x < 8 \\ [x^2 - 10x] = 7 &\Rightarrow 7 \leq x^2 - 10x < 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 14 < 2x^2 - 16x < 16 \Rightarrow 7 < x^2 - 8x < 8$$

$$\Rightarrow 23 < x^2 - 8x + 16 < 24 \Rightarrow 23 < (x - 4)^2 < 24 \Rightarrow [(x - 4)^2] = 23$$

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$|[x - 3]| \leq \frac{5}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} \leq [x - 3] \leq \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} [x - 3] \geq -\frac{5}{4} \Rightarrow [x - 3] \geq -2 \\ [x - 3] \leq \frac{5}{4} \Rightarrow [x - 3] \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2 \leq [x] - 3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq [x] \leq 5 \Rightarrow 1 \leq x < 6$$

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱- گزینه ۱: $A = \{-1, -4, -9, -16, \dots\}$ ندارد $\text{Min} \quad \text{Max}(A) = -1$

۲- گزینه ۲: $B = \{-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \dots\}$ ندارد $\text{Max} \quad \text{Min}(B) = -1$

۳- گزینه ۳: $C = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\}$ ندارد $\text{Min} \quad \text{Max}(C) = 1$

۴- گزینه ۴: $D = \{0, \frac{1}{4}\}$ $\text{Min}(D) = 0 \quad \text{Max}(D) = \frac{1}{4}$

اگر n زوج باشد $\frac{n}{4} - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor = 0$ و اگر n فرد باشد $\frac{n}{4} - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor = \frac{1}{4}$

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق اصل کمال اعداد حقیقی هر مجموعه ی غیرتهی که از بالا کراندار باشد دارای کوچکترین کران بالاست. در گزینه ۳، لااقل تمام اعداد طبیعی در مجموعه عضویت دارند. پس از بالا بی کران است.

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کوچکترین کران بالای مجموعه جواب برابر ۶ است. بزرگترین کران پایین مجموعه جواب برابر ۲ است. $||x - 2|| \leq 3 \Rightarrow |x - 2| < 4 \Rightarrow -4 < x - 2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 6 \Rightarrow$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$|x + 1| + |x - 7| = |x + 1| + |7 - x| \geq 8 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \quad \text{همواره نامساوی برقرار است}$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می دانیم اگر $n \in \mathbb{Z}$ و $n \leq [x] \leq n + 1$ آن گاه $x < n + 1$ پس:

$$||2x - 3|| \leq 2 \Rightarrow |2x - 3| < 3 \Rightarrow -3 < 2x - 3 < 3$$

$$\Rightarrow 0 < 2x < 6 \Rightarrow 0 < x < 3 \Rightarrow A = (0, 3)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{sup}(A) = 3 &\text{ کوچکترین کران بالا} \\ \text{inf}(A) = 0 &\text{ بزرگترین کران پایین} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{جمع} = 3$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم عکس هر عدد با آن عدد هم علامت است. چون $0 < a < b$ پس

$$0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$$

تنها گزینه ی نادرست ۲ است.

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در گزینه های ۱ و ۳ و ۴ مجموعه جواب نامعادلات یک مجموعه ای است که از بالا

بی کران است زیرا هر یک از نامعادلات برای $n \geq n_0$ برقرارند مثلاً در گزینه ی ۱ نامساوی $2^n > n^3$ برای $n \geq 10$ همواره برقرار است.

اما در گزینه ی ۲ رشد 3^n بیشتر از رشد n^4 است به همین لحاظ مجموعه جواب گزینه ی ۴ یک مجموعه با تعداد اعضای متناهی است.

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$N(2, 1) = 1 \text{ شعاع } 1 \text{ و مرکز } 2 = (1, 3)$$

$$N(-1, 3) = 3 \text{ شعاع } 1 \text{ و مرکز } -1 = (-4, 2)$$

بازه (۱ و ۲) درحقیقت همسایگی عدد $\frac{3}{4}$ به شعاع $\frac{1}{4}$ است:

$$(1, 2) = N\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta - \alpha = -1$$

نکته: بازه (a, b) درحقیقت یک همسایگی به مرکز $\frac{a+b}{2}$ و به شعاع $\frac{b-a}{2}$ است.

$$a < x < b \Leftrightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}$$

به عبارت دیگر:

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. همسایگی به مرکز ۲ و به شعاع ۱

$$|2x - 3| < 1 \Rightarrow x > 0, -1 < 2x - 3 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

$$\Rightarrow a = 2, b = 1 \Rightarrow ab = 2$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

می دانیم که:

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad (1)$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad (2)$$

با استفاده از این قوانین به ترتیب داریم:

$$||x - 2| - |x + 3|| \leq |x - 2 - x - 3| = |-5| = 5 \quad (1)$$

$$-5 \leq |x - 2| - |x + 3| \leq 5 \quad (2)$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$49 < x^2 < 121 \Rightarrow 7 < |x| < 11 \Rightarrow \begin{cases} |x| < 11 \Leftrightarrow -11 < x < 11 \\ |x| > 7 \Leftrightarrow x < -7 \text{ یا } x > 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = (-11, -7) \cup (7, 11)$$

x باید عدد صحیح باشد، پس $A = \{-10, -9, -8, 8, 9, 10\}$ می‌باشد و داریم:

$$\max A - \min A = 10 - (-10) = 20$$

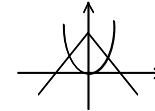
$$a^2 < x^2 < b^2 \Leftrightarrow -b < x < -a \text{ یا } a < x < b$$

نکته: اگر a و b اعداد مثبت باشند:

۱۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^4 + |x| - 3 = 0 \Rightarrow x^4 = -|x| + 3 \Rightarrow \begin{cases} y = x^4 \\ y = 3 - |x| \end{cases}$$

نمودارهای توابع $y = 3 - |x|$ ، $y = x^4$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم، چون دو نمودار یک‌دیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.



$$x^4 + |x| - 3 = 0$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. باید $a - 10 < |x - 3|$ منفی باشد تا آن که برقراری $a - 10 < |x - 3|$ بدیهی بوده و فقط $a - 10 < 0 \Rightarrow a < 10 \Rightarrow \max(a) = 9$ در نظر گرفته شود.

۱۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به $0 < \frac{1}{x} < 2$ باید $\frac{1}{x}$ مثبت بوده و در نتیجه $x > 0$ است. حال اگر طرفین

$$0 < \frac{1}{x} < 2 \text{ را در } x \text{ که مثبت نیز هست ضرب کنیم، خواهیم داشت:}$$

$$2x > 1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

ملاحظه می‌شود که A بی‌کران است و ماکزیمم و می‌نیمم ندارد.

۱۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\exists k \in \mathbb{R} \forall x \in A : k \leq x$$

چون A کران دار از پایین است پس

$$\exists k' \in \mathbb{R} \forall x \in B : x \leq k'$$

مجموعه B از بالا کران دار است پس

چون $A \cap B$ شامل اعضای A است که هم در A و هم در B هستند پس هر ۲ شرط فوق برقرار است، لذا

$$y \in A \cap B \Rightarrow k \leq y \leq k'$$

یعنی مجموعه‌ی غیر تهی $A \cap B$ هم از بالا و هم از پایین کران دار است پس در کل کران دار است.

۲۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. بدیهی است. به‌عنوان مثال اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$ آن‌گاه A یک مجموعه‌ی کران‌دار است که تعداد اعضای آن نامتناهی است.