۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left|\frac{۳x^۲-x-۲}{۲(x-۱)}-\frac{۵}{۲}\right|=\left|\frac{(x-۱)(۳x+۲)}{۲(x-۱)}-\frac{۵}{۲}\right|<\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{۳x+۲-۵}{۲}\right|<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow|x-۱|<\frac{۲}{۳۰۰}\Rightarrow|x-۱|<\frac{۱}{۱۵۰}\Rightarrow\delta\leqslant\frac{۱}{۱۵۰}$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left|\frac{۹x^۲-۱}{۳x-۱}-۷\right|<\frac{۳}{۱۰۰}\Rightarrow|۳x+۱-۷|<\frac{۳}{۱۰۰}\Rightarrow ۳|x-۲|<\frac{۳}{۱۰۰}\Rightarrow|x-۲|<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow\delta_۱\leqslant\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\left|\frac{۱}{۲}x+۶-۷\right|<\frac{۳}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲}|x-۲|<\frac{۳}{۱۰۰}\Rightarrow|x-۲|<\frac{۶}{۱۰۰}=۰/۰۶\Rightarrow$$

$$\delta_۲\leqslant ۰/۰۶\qquad\delta\leqslant \operatorname{Min}\left\{\frac{۱}{۱۰۰}\ \text{و}\ \frac{۶}{۱۰۰}\right\}\Rightarrow \operatorname{Max}\delta=\frac{۱}{۱۰۰}$$

۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰^-}\sqrt{\operatorname{Sin}x}=\sqrt{۰^-}\quad:\ \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\operatorname{ArcSin}(۱-x)=\operatorname{ArcSin}(۱^+)\quad:\ \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to ۰}[\operatorname{Cos}x]=\left[۱^-\right]=۰$$

۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x-۲)+f(۳-x)=f((-۱)^+)+f(۲^-)=-۱+۱=۰$$

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x-۲)+f(۳-x)=f((-۱)^-)+f(۲^+)=۰+۰=۰$$

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع در همسایگی چپ $x=۲$ تعریف نشده است.

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}^+}\left(f\left(x^۲-۲\right)+f\left(۲-x^۲\right)\right)=f\left(۰^+\right)+f\left(۰^-\right)=۱+۲=۳$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}^-}\left(f\left(x^۲-۲\right)+f\left(۲-x^۲\right)\right)=f\left(۰^-\right)+f\left(۰^+\right)=۲+۱=۳$$

۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در گزینه‌ی ۱، حد راست صفر است اما حد چپ برابر $+\infty$ است. در گزینه‌ی ۲ حد راست تابع تعریف نشده و حد چپ آن صفر است. در گزینه‌ی ۳، حد چپ وجود ندارد و حد راست آن $\frac{\pi}{۲}$ است. در گزینه‌ی ۴، مقدار حد تابع $\frac{\pi}{۲}$ است. بدیهی است هم حد چپ و حد راست هر دو موجودند و با هم برابرند.

۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۱^-}fofof(x)=\lim_{x\to ۲^-}fof(x)=\lim_{x\to +\infty}f(x)=۰$$

۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تابع $f(x)=\begin{cases}۱\\ ۰\end{cases}$ در کتاب درسی کاملاً توضیح داده شده است در هیچ نقطه حد ندارد.

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

باید دو دنباله همگرا به $\sqrt{۲}$ باشند. تنها گزینه‌ای که $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\sqrt{۲}$ گزینه ۲ است.

۱۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. چون $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۰$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{۲}}{n}=۰$ **همچنین:**

$$f\left(\frac{۱}{n}\right)=۱\ \text{و}\ f\left(\frac{\sqrt{۲}}{n}\right)=-۱$$

۱۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. دنباله‌ی دیگر باید به گونه‌ای باشد که علاوه بر آنکه همگرا به ۲ است مقدار $\lim_{x\to\infty}f(a_n)$ **با** $\lim_{x\to\infty}f(b_n)$ **متفاوت باشد. با توجه به آنکه** $\operatorname{Cos}\left(۲n\pi+\frac{\pi}{۳}\right)=\operatorname{Cos}\left(۲n\pi-\frac{\pi}{۳}\right)$ **، پس دنباله‌ی نامناسب دنباله‌ی ارائه شده در گزینه‌ی ۱ است. زیرا:**

$$\operatorname{Cos}\left(۲n\pi+\frac{\pi}{۳}\right)=\operatorname{Cos}\left(۲n\pi-\frac{\pi}{۳}\right)$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\frac{۱}{۲}+\left[۲^-\right]=\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۲}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

عبارت مورد نظر $=۲+(-۱)+۱=۲$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در گزینه (۱) حد چپ و راست در این نقطه با هم برابر نمی‌باشند.

$$\begin{cases}\lim_{x\to ۰^+}\operatorname{Arctg}\frac{۱}{x}=\frac{\pi}{۲}\\[2ex] \lim_{x\to ۰^-}\operatorname{Arctg}\frac{۱}{x}=\frac{-\pi}{۲}\end{cases}$$

در گزینه (۲) تابع دارای حد راست نمی‌باشد.

در گزینه (۴) حد چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابر نمی‌باشند.

$$\begin{cases}\lim_{x\to ۰^+}[\operatorname{Sin}x]=۰\\ \lim_{x\to ۰^-}[\operatorname{Sin}x]=-۱\end{cases}$$

در گزینه (۳)، $\lim_{x\to ۰}\left[\frac{\operatorname{Sin}x}{x}\right]=۰$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

وقتی $x\to 1^-$ تابع $f(x)\to 1^-$, Arc Sinx به ازای جمیع مقادیر کمتر از یک تعریف شده است. پس حد برابر است با:

$$\lim_{x\to 1^-} \text{Arc Sin}\, f(x) = \frac{\pi}{2}$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0^+} fof(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فرض $\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x} - p$ داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\left(\frac{1}{x} - p\right)\right] = \lim_{x\to 0^+}[1 - xp] \Rightarrow \begin{cases} 0 & 0<p<1 \\ 1 & p=0 \end{cases}$$

(برای مقادیری چون $x = \frac{1}{n}$ که $n\in N$ آنگاه $p=0$ خواهد بود.) پس حد وجود نخواهد داشت.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{\pi}\text{Arctg}\frac{1}{x}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right] = \left[1 - \frac{2\varepsilon}{\pi}\right] = 0$$

باید توجه کنیم که $\lim_{x\to +\infty}\text{Arctg}\, x = \frac{\pi}{2}$ اما تابع از $\frac{\pi}{2}$ کوچکتر است.

اختلاف حد چپ و حد راست = ۱

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2}{\pi}\text{Arctg}\frac{1}{x}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi}{2} + \varepsilon\right)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-1 + \frac{2\varepsilon}{\pi}\right] = -1$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{2x}}{2}}{x^3+3x^2-2x} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{2x}}{2}\right)^2}{(x^3+3x^2-2x)} = \frac{x}{\left(x\left(x^2+3x-2\right)\right)} = -\frac{1}{2}$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\left(\frac{-1}{7}\right)^+}\left[\frac{1}{x}\right] = -8 \quad \lim_{x\to\left(\frac{-1}{7}\right)^-}\left[\frac{1}{x}\right] = -7 \Rightarrow (-8) - (-7) = -1$$

به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت

دیفرانسیل - حد — دبیر: کشانی

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1-4}{0^-} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. توجه: $x<-1 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow -x^2<-1$

$$\lim_{x\to -1^-}\left[x^2\right] - \lim_{x\to -1^-}\left[-x^2\right] = \left[1^+\right] - \left[-1^-\right] = 1 - (-2) = 3$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم $\text{ArcCos}\, x = t$ در نتیجه $x = \cos t$ در نتیجه:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos^2 t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\sin^2 t} = 1$$

۲۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که $|x| \geq |\sin x|$ پس $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$ (برای $x\neq 0$) بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \left[1^-\right] = 0$$

۲۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(-1)^{[x]}\text{Arctg}\frac{2}{x} = 1\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-1)^{[x]}\text{Arctg}\frac{2}{x} = -1\times -\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

چون $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$، پس مقدار اختلاف صفر است.

۲۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{0}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1 + \frac{-1}{-x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

۲۸- با توجه به اینکه $\text{Cotg}\, a - \text{Cotg}\, b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$ داریم:

$$\sin 4x(\text{Cotg}\, 2x - \text{Cotg}\, x) = \sin 4x\left(\frac{\sin(x-2x)}{\sin 2x.\sin x}\right) = \sin 4x\left(\frac{\sin(-x)}{\sin 2x\sin x}\right) =$$

$$\frac{-\sin 4x}{\sin 2x} = \frac{-2\sin 2x\cos 2x}{\sin 2x} = -2\cos 2x\ ,\quad \lim_{x\to 0} -2\cos 2x = -2$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

-۲۹

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+\sqrt{2x+8}}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(x+\sqrt{2x+8}\right)\left(x-\sqrt{2x+8}\right)}{(x+2)\left(x-\sqrt{2x+8}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{(x+2)\left(x-\sqrt{2x+8}\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x-4)}{\cancel{(x+2)}\left(x-\sqrt{2x+8}\right)}=\frac{-6}{-2-2}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.
تذکر: این مساله با قاعده هوپیتال ساده‌تر حل می‌شود.

-۳۰ حل به کمک قاعده هوپیتال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\pi\left(\sqrt[3]{2x-3}-1\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\pi\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-3)^2}}-0\right)}{\frac{\pi}{x^2}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}=\frac{\pi\left(\frac{2}{3\times 1}\right)}{\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{8}{3}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

-۳۱ یادآوری: $\underset{u\to 0}{\tan(u)\approx u}$ **و** $\underset{u\to 0}{\sin(u)\approx u}$ **می‌باشند.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x\tan(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x)}{x\tan(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}}=\frac{2}{3}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.
تذکر: این مساله به کمک قاعده هوپیتال نیز قابل حل است.

-۳۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$$

$$\lim_{x\to -4}\left(\frac{5}{x^2+3x-4}+\frac{1}{x+4}\right)=\lim_{x\to -4}\frac{5+(x-1)}{(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)}{(x+4)(x-1)}=-\frac{1}{5}$$

-۳۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan(x)}{\sin(x)-\cos(x)}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)}}{\sin(x)-\cos(x)}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos(x)}=-\sqrt{2}$$

-۳۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 8}\frac{2-\sqrt[3]{x}}{4-\sqrt{2x}}\ \overset{\text{هوپیتال}}{=}\ \lim_{x\to 8}\frac{\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\frac{-1}{\sqrt{2x}}}=\frac{\frac{-1}{12}}{\frac{-1}{4}}=\frac{1}{3}$$

به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت
دیفرانسیل - حد
دبیر: کشانی

-۳۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x\cdot\sqrt{1+\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x\cdot\sqrt{1+\cos x}}\Rightarrow\begin{cases}\text{حد راست}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \text{حد چپ}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

-۳۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x}=0$$

-۳۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{x-2}=-\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

-۳۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\sin 3x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{2\sin 2x\cos x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{\cos^2 x}}{4\sin x\cancel{\cos^2 x}}=\frac{1}{4}$$

-۳۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{2\sin^2\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\times 3}{2\sin^2\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\times\frac{x^2}{4}\times 3}{2\times\frac{9x^2}{4}}=\frac{1}{3}$$

-۴۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2(a+x)\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2(a+x)\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)}=\frac{2}{a\times 2}=3\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

-۴۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\times\frac{2\tan x}{(1-\tan x)(1+\tan x)}=\frac{2}{2}=1$$

۴۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از قبل داشتیم

$$\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\cos^n x \sim 1 - \frac{n}{2}x^2 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{\cos x} \sim 1 - \frac{1}{4}x^2 \\ \sqrt{\cos 2x} \sim 1 - \frac{1}{4}\times 4x^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{4}x^2 - 1 + x^2}{\pi^2 x^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\pi^2} = \frac{3}{4\pi^2}$$

۴۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to 3} \frac{ax+b}{x - \sqrt{x+6}} = \frac{0}{0} \Rightarrow 3a + b = 0 \quad \overset{H}{\equiv} \lim \frac{a}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+6}}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{6}{5}a = \frac{6}{5} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -3$$

۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + ax + b} = \frac{0}{1 + a + b} \Rightarrow a + b = -1$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{2x - 6}{2x + a} = \frac{2 - 6}{2 + a} = 2 \Rightarrow \frac{-4}{a+2} = 2 \Rightarrow a + 2 = -2 \Rightarrow a = -4 \text{ و } b = 3$$

$$2a + b = -8 + 3 = -5$$

۴۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x\,.\,(1 - \sin x)}{\cos^2 x\,.\,(1 - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 2$$

۴۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{\sin(\sin x)}{\sqrt{1 + \cos x}} = \lim_{x \to \pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} = \lim_{x \to \pi^+} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}$$

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{(-1)} = -\sqrt{2}$$

چون $x \to \pi^+$ پس $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = -\cos\frac{x}{2}$:

۴۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} fog(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sqrt{\sec^2 x - 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sqrt{tg^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} |tg\, x| = +\infty$$

۴۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون در صورت جمله فاقد x حذف می‌شود کافی است ضریب x در صورت یافت شود زیرا وقتی $x \to 0$ هرچند جمله‌ای فاقد مقدار ثابت را می‌توان با جمله با کوچکترین درجه جایگزین کرد.

۴۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2(5\pi - 5x)}{1 - \cos(3\pi - 3x)} = \lim_{x \to \pi} \frac{25\cancel{(\pi - x)^2}}{\frac{1}{2} \times 9\cancel{(\pi - x)^2}} = \frac{50}{9}$$

۵۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$

اما می‌دانیم این تابع در $x = 0$ فاقد حد است.

۵۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to \infty} f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{2x+3} = \frac{1}{2}$$

۵۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{2\sin^2 \frac{\sqrt[3]{x}}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3 \times 2 \times \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

۵۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

$$1 - \cos^a mx \approx \frac{a}{2}\,.\,m^2 x^2 \qquad x \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{n^2}{2}x^2}{\frac{1}{2n}4x^2} = \frac{n^3}{4} = 16 \Rightarrow n^3 = 64 \Rightarrow n = 4$$

۵۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق قاعده هوپیتال برای رفع ابهام این حد داریم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{-\sin x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{2(x-\pi)}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{6(x-\pi)}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

۵۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1+\operatorname{tg}2x}{1+\operatorname{Cotg}x}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

۵۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3(2x^2-2)}{(x^2-2x+1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)^3(x-1)(x+1)}{[(x-1)^2]^2}=\lim_{x\to1}2(x+1)=4$$

۵۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

مخرج را با استفاده از اتحاد $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ به صورت $(x-2)^3$ و صورت را با استفاده از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^3(x^2+2x+4)^3}{(x-2)^3}=12^3$$

۵۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$ پس:

$$\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\text{حد}}\frac{\cos 2x}{\cos^3x-\sin^3x}=\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\text{حد}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x-\sin x)(\cos^2x+\sin^2x+\cos x\sin x)}=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۵۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=-1$$

به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت

دیفرانسیل - حد　　　　دبیر: کشانی

۶۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. در حالی که می‌توان صورت و مخرج را با ضرب در مزدوج صورت $\left(x-6+\sqrt{x}\right)$ عامل $x-9$ را حذف کرد، در این‌جا از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌نماییم (از صورت و مخرج مشتق می‌گیریم).

$$\lim_{x\to9}\frac{x-6-\sqrt{x}}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to9}\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x-10}=\frac{1-\frac{1}{6}}{18-10}=\frac{\frac{5}{6}}{8}=\frac{5}{48}$$

۶۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(x+1)}{\left(2\sqrt{x}+5\right)^2\left(1-\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x}\,.\,x}{\left(2\sqrt{x}\right)^2\left(-\sqrt{x}\right)}=-\frac{1}{4}$$

۶۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}2x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}-\frac{\operatorname{tg}2x}{x}\right)=1-2=-1$$

۶۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}+\frac{1-\sqrt{1+3x}}{x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x}{x\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}+\sqrt[3]{1+2x}+1\right)}+\frac{-3x}{x\left(1+\sqrt{1+3x}\right)}=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{6}$$

تذکر: با استفاده از هوپیتال نیز می‌توان سوال را به راحتی حل نمود.

۶۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}=$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۶۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$1+x^2=t^{12}\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1+x^2}}{x^2}=\lim_{t\to1}\frac{t^4-t^3}{t^{12}-1}=\lim_{t\to1}\frac{t^3(t-1)}{(t-1)\left(t^{11}+t^{10}+\dots+t+1\right)}=\frac{1}{12}$$

۶۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$? = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\sin x}{x}+\frac{2\tan 2x}{2x}+\frac{x^2}{x}}{\frac{x^2}{x}-\frac{x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2+2+x}{x-1} = -4$$

۶۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$? = \lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)} = \lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x} = \frac{2}{3}$$

۶۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x-1}-3^{-x+1}}{2^x+3^{-x-1}} = \frac{2^{-\infty}-3^{+\infty}}{2^{-\infty}+3^{+\infty}} = \frac{0-\infty}{0+\infty} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow[\text{پرتوان را می نویسیم}]{\text{عاملهای}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{-3^{-x+1}}{3^{-x-1}} = \lim_{x\to-\infty} -3^{\overbrace{-\cancel{x}+1+\cancel{x}+1}^{9}} = -9$$

۶۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{Cotg}\frac{\pi}{4}}{\sin\pi} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin 4x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin x\cos x}}{2\sin 2x\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{-(\cos 2x)}{\frac{1}{2}\sin 2x}}{\frac{2\sin 2x\cos 2x}{1}} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{\sin^2 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2} = -1$$

۷۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\pi}(1+\cos x)\operatorname{Cotg}^2 x = 0\times\infty = \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to\pi}(1+\cos x)\times\frac{\cos^2x}{\sin^2x} = \lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)\cos^2 x}{1-\cos^2x} = \lim_{x\to\pi} \frac{(1+\cos x)\cos^2x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت

دیفرانسیل - حد

دبیر: کشانی

۷۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{Cotg} 2x}{\operatorname{Cotg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2(1+\operatorname{Cotg}^2 2x)}{-\left(1+\operatorname{Cotg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{-2}{-1}=2$$

۷۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{10}+x-2}{x^5+x-2} = \lim_{x\to1}\frac{(x^{10}-1)+(x-1)}{(x^5-1)+(x-1)} = \lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\left[(x^9+\dots+x^2+x+1)+1\right]}{\cancel{(x-1)}\left[(x^4+\dots+x+1)+1\right]} = \frac{10+1}{5+1} = \frac{11}{6}$$

۷۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to\pi}\frac{-\sin(\pi+\pi\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to\pi}\frac{-\sin(\pi(1+\cos x))}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{-1}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin(\pi(1+\cos x))}{1+\cos x} = \frac{-1}{2}\times\pi = \frac{-\pi}{2}$$

۷۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to0^+}\operatorname{Cotg} x=+\infty, \quad \lim_{x\to0^-}\operatorname{Cotg} x = -\infty$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+2^{\operatorname{Cotg} x}} = \frac{1}{1+2^{-\infty}} = \frac{1}{1+0}=1\\
&\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+2^{\operatorname{Cotg} x}} = \frac{1}{1+2^{+\infty}} = \frac{1}{1+\infty}=0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{1}{1+2^{\operatorname{Cotg} x}} : \text{وجود ندارد}$$

۷۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Cotg} 3x}{\operatorname{Cotg} 2x} = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

۷۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\operatorname{tg} 4x\,\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{8}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)}{\operatorname{Cotg} 4x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)} = \frac{x-\frac{\pi}{8}}{-4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{-1}{4}$$

۷۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x}{-1+2}=3$$

۷۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(1-\sin^2 x)}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}2(1+\sin x)=2\times 2=4$$

۷۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{tg x-tg\frac{\pi}{4}}{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\times\frac{1}{\cos x\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=1\times\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=1\times 2=2$$

۸۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{100}-1-100x}{2-2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+100x+\frac{100\times 99}{2}x^2+\dots+1-100x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4950x^2}{4\sin^2\frac{x}{2}}=4950$$

تذکر: این مساله با استفاده از هوپیتال، به سادگی حل می‌شود.

به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت

دیفرانسیل - حد

دبیر: کشانی

۸۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-x\,Cotg\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\frac{x\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2.\sin x}{\sin x-x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-x\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3}=3$$

۸۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$L=\lim_{x\to 3}(9-x^2)\,Cotg\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$

$$3-x=u\ \Rightarrow\ L=\lim_{u\to 0}u(6-u)\,Cotg\left(\frac{\pi(3-u)}{3}\right)\ \Rightarrow\ \lim_{u\to 0}u(6-u)\,Cotg\left(\frac{-\pi u}{3}\right)$$

$$\Rightarrow L=\lim_{u\to 0}\frac{u(6-u)}{tg\left(\frac{-\pi u}{3}\right)}=\lim_{u\to 0}\frac{u(6-u)}{\frac{-\pi u}{3}}=\frac{-18}{\pi}$$

۸۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\times 2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

۸۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: $\lim_{x\to 0}\cos mx=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{m}{2}x^2\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^3-3x^2}=\frac{1-\left(1-\frac{1}{6}(3x)^2\right)}{-3x^2}=-\frac{1}{2}$$

۸۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

۸۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\sin x\cos x}{\cos(\cos x-۱)}=\frac{۲}{-۱}=-۲$$

۸۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to۰}\frac{x^۲-۲+۲\cos x}{x^۲(۱-\cos x)}=\lim_{x\to۰}\frac{x^۲+۲\cos x-۲}{x^۲\cdot\frac{۱}{۲}x^۲}\overset{H}{=}\lim_{x\to۰}\frac{۲x-۲\sin x}{۲x^۳}$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{x-\sin x}{x^۳}=\frac{۱}{۶}\qquad x-\sin x\underset{x\to۰}{\sim}\frac{۱}{۶}x^۳$$

۸۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x^۲-۱}=۳\Rightarrow\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to۱}\frac{f'(x)}{۲x}=۳\Rightarrow\frac{f'(۱)}{۲}=۳\Rightarrow f'(۱)=۶$$

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۱+۲h)-f(۱)}{۳h}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{h\to۰}\frac{۲f'(۱+۲h)}{۳}=\frac{۲f'(۱)}{۳}=\frac{۲\times۶}{۳}=۴$$

۸۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\frac{\pi}{۲}-x}{tg\,۲x-\cot x}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{-۱}{۲(۱+tg^۲\,۲x)+(۱+\cot^۲x)}=\frac{-۱}{۲+۱}=\frac{-۱}{۳}$$

۹۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^۲+۴x}}{۳x-۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-|x|\sqrt{۱+\frac{۴}{x}}}{x\left(۳-\frac{۲}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+x\sqrt{۱+\frac{۴}{x}}}{x\left(۳-\frac{۲}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱+\sqrt{۱+\frac{۴}{x}}}{۳-\frac{۲}{x}}=\frac{۲}{۳}$$

به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت

دیفرانسیل - حد

دبیر: کشانی

۹۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x-x^۲}{x^۲+\sqrt{x^۴-x^۳}}\quad\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^۲}\left(\frac{۳}{x}-۱\right)}{\cancel{x^۲}\left(۱+\sqrt{۱-\frac{۱}{x}}\right)}=\frac{-۱}{۲}$$

۹۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}=۱$$

چون $\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}<۱$ پس :

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{ArcSin}\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{\pi}{۲}$$

۹۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. وقتی $x\to+\infty$ آنگاه می‌توان با توجه به آنکه $۰\le\sin^۲x\le۱$ از تابع $\sin^۲x$ صرف‌نظر کرد. لذا حد داده شده برابر ۳ است. زیرا:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲-\sin^۲x}{x^۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲}{x^۲}=۳$$

۹۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$n>۳\Rightarrow$ حد $=-\frac{۲}{۵}$ $\quad n=۳\Rightarrow$ حد $=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$ $\quad n<۳\Rightarrow$ حد $=\frac{۴}{۵}$

۹۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شرایط حد باید $x=۲$ ریشه مضاعف مخرج باشد (زیرا حد راست و چپ آن هر دوبرابر $+\infty$ شده است) اما صورت به ازای $x=۲$ عددی منفی است. پس هیچ مقداری برای a و b نمی‌توان یافت.

۹۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $f(x)=\frac{-۳x-۲}{۲-۵x}=\frac{۳x+۲}{۵x-۲}$

$$۲f(x)-۵xf(x)=-۳x-۲$$

برای یافتن $\lim_{x\to\infty}f^{-۱}(x)$ باید مجانب افقی $f^{-۱}$ را پیدا کنیم می‌توانیم به جای آن مجانب قائم $y=f(x)$ را بیابیم

$$\left(x=\frac{۲}{۵}\right)\qquad\lim_{x\to\infty}f^{-۱}(x)=\frac{۲}{۵}$$

۹۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x}{۱-x}\operatorname{Arctg}x=(-۲)\times\left(-\frac{\pi}{۲}\right)=\pi$$

۹۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x-\left|x+\frac{1}{2}\right|=-\frac{1}{2}$$

۹۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)\times\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}(x+2-x+3)}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

۱۰۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x-1}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2-\frac{3}{x+1}\right]=\left[2^-\right]=1$$

۱۰۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2-6x+1}\right)\sin\frac{3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+|x|\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}\sin\frac{3}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}2x\sin\frac{3}{x}=\lim_{t\to0}2\times\frac{3}{t}\sin t=6$$

۱۰۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. توجه:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{an}\right)$$

$$?=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{4}\left(x+\frac{8}{8}\right)\right)=-2$$

۱۰۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2-3x+2ax^2+2bx-ax-b}{ax+b}\right)=0\Rightarrow$$

باید درجه‌ی صورت از مخرج کمتر باشد.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2+2a)x^2+(2b-a-3)x-b}{ax+b}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2+2a=0\Rightarrow a=-1\\ 2b-a-3=0\Rightarrow 2b+1-3=0\Rightarrow b=1\Rightarrow a+b=0\end{cases}$$

به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت

دیفرانسیل - حد

دبیر: کشانی

۱۰۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x-2-x^4+2x^2-1}{\sqrt{x^4+x-2}+\left(x^2-1\right)}=\lim\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}+1-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2}{2}=1$$

۱۰۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$?=\lim_{x\to+\infty}x\times\frac{\frac{4x+1}{x-1}-4}{\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\times\frac{5}{x-1}}{\sqrt{4}+2}=\frac{5}{4}$$

۱۰۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-\sqrt{4x^2-1}}{3x-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-\sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x^2}\right)}}{3x-\sqrt{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-|2x|}{3x-\sqrt{-x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+2x}{x\left(3-\frac{\sqrt{-x}}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{3x}=2$$

۱۰۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x+5^{x+1}}{3^x-5^{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x+5\right)}{5^x\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x-5^{-1}\right)}=\frac{5}{-\frac{1}{5}}=-25$$

۱۰۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{3^{n+1}+4^n}{3^{n+2}+4^{n+1}}=\lim_{n\to-\infty}\frac{\cancel{3^n}\left(3+\left(\frac{4}{3}\right)^n\right)}{\cancel{3^{n+1}}\left(3+\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right)}=\frac{3}{3\times3}=\frac{1}{3}$$

۱۰۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-[x]}{2x+5}=\lim_{x\to\pm\infty}(x-[x])\cdot\frac{1}{2x+5}=(\text{مقداری بین صفر و یک})\times0=0$$

۱۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2+x}-x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x}{\sqrt{x^4+2x^2+x}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1\right)}$$

$$=\frac{2}{1+1}=1$$

۱۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}{3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

۱۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x\to+\infty\ ,\ \frac{1}{x}=t\Rightarrow t\to0$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

۱۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^n}{2x^n}=\frac{6}{2}=3$$

۱۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^5}{10x^3}=\lim\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}(-\infty)^2=+\infty$$

به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت

دیفرانسیل - حد　　　　دبیر: کشانی

۱۱۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(x^2+2-x^2+2\right)}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{|x|+|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{-2x}=-2$$

۱۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{4x^2}}{\sqrt{x^2}-\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|+2|x|}{|x|-2|x|}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3|x|}{-|x|}=-3$$

۱۱۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3\ldots\ldots}{3x^3\ldots\ldots}=\frac{8}{3}$$

۱۱۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}x^{\frac{2}{3}}\times\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=0$$

۱۱۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. چون مقدار حد برابر عدد شده است پس باید بزرگترین درجه صورت و مخرج با هم برابر باشند یعنی:

$a=0$ و $c=3$

$$\frac{bx^3}{2x^3}=2\longrightarrow b=4\longrightarrow a+b+c=7$$

۱۲۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty}x\left[\frac{1}{x}\right]=-\infty\times\left[0^-\right]=-\infty\times-1=+\infty$$