۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\tan^2\left(\frac{x}{4}\right)}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\left(\frac{x}{4}\right)^2}{2\sin^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}}{2(2x)^2}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{8}{1}}=\frac{1}{32}$$

۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos\frac{x}{2}}{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\pi-2x)\cos\frac{x}{2}}{-2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}{\frac{\pi}{2}-x}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{-2}$$

$$=2\times\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-4x^3+3}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^6-x^3-3x^3+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+1})}\times\left(\sqrt{x+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3(x^3-1)-3(x^3-1)}{x-1}\times\left(\sqrt{x}+1\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)(x^3-3)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)(x^3-3)\left(\sqrt{x}+1\right)}{1}=3\times -2\times 2=-12$$

۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-\tan^2x+x\sin 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x^2}{x^2}-\frac{\tan^2x}{x^2}+\frac{x\sin 2x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(4-\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2+\frac{\sin 2x}{x}\right)=4-1+2=5$$

۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=2-2(1)=0$$
$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=1-2(0)=1\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to 2^+}f(x)-\lim_{x\to 2^-}f(x)=-1$$



به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت

آزمون دیفرانسیل ۹۰/۰۹/۰۱ دبیر: کشانی

۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sin^2x}+\frac{1}{x^2}=-b\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+\sin^2x}{x^2\sin^2x}=-b$$

مقدار a هرچه (به‌جز ۱-) باشد حاصل حد برابر ∞+ یا ∞- می شود، بنابراین $a=-1$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+\sin^2x}{x^2\sin^2x}=-\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2\sin^2x}$$

$$=-\frac{\frac{1}{6}x^3\cdot 2x}{x^4}=-\frac{2}{6}=\frac{-1}{3}\Rightarrow -b=-\frac{1}{3}\Rightarrow b=\frac{1}{3}$$

$$a+b=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}{(1-x)^2}=\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{(1-x)^2\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\cancel{(1-x)}\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)^2}\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\right)}=\frac{1}{6}$$

۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(|x|)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=2$$

همچنین:

$$\lim_{x\to(-1)^+}[f(x)]=\left[1^+\right]=1$$

۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از روابط ضرب به جمع داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x\cos 3x}{x^2}=\frac{1-\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)}{x^2}$$

$$=\frac{1-\cos 5x}{2x^2}+\frac{1-\cos x}{2x^2}=\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{2x^2}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2x^2}$$

$$=\frac{2\left(\frac{5x}{2}\right)^2}{2x^2}+\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2x^2}=\frac{25}{4}+\frac{1}{4}=\frac{13}{2}$$

۱۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x+1}{x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3(x+2)-5}{x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[3+\frac{-5}{x+2}\right]=3+\left[0^-\right]=3-1=2$$

نکته درسی: در تعیین $\lim\limits_{x\to x_0}[u]$ «u عبارتی بر حسب x» چنانچه حد عبارت داخل براکت برابر عدد صحیح k شود. می‌بایست مشخص نمود، داخل براکت $k^+$ می‌شود و یا $k^-$.

۱۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با ضرب و تقسیم نمودن مزدوج داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{4+f(x)}-2\right)\left(\sqrt{4+f(x)}+2\right)}{\sqrt{4+f(x)}+2}=\frac{x\left(4+f(x)-4\right)}{\sqrt{4+f(x)}+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,f(x)}{\sqrt{4+f(x)}+2}$$

$$\Rightarrow=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{\sin x}-1<\left[\frac{1}{\sin x}\right]\le\frac{1}{\sin x}$$

$$\xrightarrow{\times\ \sin 2x}\frac{\sin 2x}{\sin x}-\sin 2x<\sin 2x\left[\frac{1}{\sin x}\right]\le\frac{\sin 2x}{\sin x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}-\sin 2x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x}-\sin 2x=2\\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x}=2\end{array}\right\}\Rightarrow$$ طبق قضیه ی فشردگی

$$\lim_{x\to0^+}\sin 2x\left[\frac{1}{\sin x}\right]=2\quad (1)$$

به همین طریق داریم: $\lim\limits_{x\to0^-}\sin 2x\left[\dfrac{1}{\sin x}\right]=2\quad (2)$

$$(1)\text{ و }(2)\Rightarrow\lim_{x\to0}\sin 2x\left[\frac{1}{\sin x}\right]=2$$

راه حل دیگر: استفاده از قانون هم‌ارزی $\left[\dfrac{1}{u}\right]_{u\to0}\sim\dfrac{1}{u}$

$$\lim_{x\to0}\sin 2x\left[\frac{1}{\sin x}\right]=\lim_{x\to0}\sin 2x\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=2$$



بەنام آن‌که جان را فکرت آموخت
آزمون دیفرانسیل ۹۰/۰۹/۰۱ دبیر:کشانی

۱۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}f\text{ تابعی فرد}\Rightarrow f(-x)=-f(x)\\ \lim\limits_{x\to-2}f(x)=5\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to+2}f(x)=-5$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{3x-1}=\frac{-5}{3\times2-1}=\frac{-5}{5}=-1$$

نکته‌ی درسی:

اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد $\Rightarrow\lim\limits_{x\to-a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$

اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد $\Rightarrow\lim\limits_{x\to-a}f(x)=-\lim\limits_{x\to a}f(x)$

۱۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^2-(2x+1)^3}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2+2x+1\right)-\left(8x^3+12x^2+6x+1\right)}{3x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-8x^3-11x^2-4x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{-x\left(8x^2+11x+4\right)}{3x}=\frac{-4}{3}$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{x\,.\,\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}\right)}{x\,.\,\sin x\left(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^2+x^2-a^2+x^2}{x\,.\,x\left(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}\right)}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{a^2}}=\frac{1}{|a|}=\frac{1}{a}$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. تابع $\cos\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$ هنگامی که $x\to\dfrac{\pi}{2}^+$ حد ندارد و در بازه‌ی $[-1,1]$ نوسان می‌کند. ضمناً تابع $\cot x$ هنگامی که $x\to\dfrac{\pi}{2}^+$، در حالی که مثبت است به صفر می‌گراید. لذا با استفاده از قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$-1<\cos\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}<1\Rightarrow\cot x<\cot x\,.\cos\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}<-\cot x$$

چون حد توابع $\cot x$ و $-\cot x$ برابر صفر است، حد تابع موردنظر نیز صفر می‌شود.

۱۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(\tan x+1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{3+\cos 4x} = \frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. کافی است دنباله‌ای چنان انتخاب کنیم که اولاً همگرا به ۲- باشد، ثانیاً $f(a_n)$، به ازای $n\to\infty$ دارای حدهای مختلف باشد، پس کافی است داشته باشیم:

$$\frac{\pi}{a_n+2} = \frac{n\pi}{2} \Rightarrow a_n = \frac{2}{n} - 2 = \frac{-2n+2}{n}$$

پس تابع حدّ ندارد.

۱۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از روش هم‌ارزی و با توجه به آن که اگر $x\to 0$ و $\tan x\approx x$ و $\sin x\approx x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \approx \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{2}-\left(1-\frac{x}{2}\right)}{1+\frac{x}{3}-\left(1-\frac{x}{3}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{2x}{3}}=\frac{3}{2}$$

هم ارزی برنولی:

$$\sqrt[n]{1+u}\approx 1+\frac{u}{n} \quad u\to 0$$

$$(1+u)^n\approx 1+nu \quad u\to 0$$

۲۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. از قاعده‌ی هوپیتال بهره می‌گیریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^3-1} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{3x^2} = \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}{3}=\frac{1}{9}$$

راه حل دیگر: صورت و مخرج را در عبارت چاق صورت ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\right)\left(x\sqrt[3]{x}+x+\sqrt[3]{x^2}\right)}{(x^3-1)\left(x\sqrt[3]{x}+x+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)}{(x^3-1)\left(x\sqrt[3]{x}+x+\sqrt[3]{x^2}\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)\left(x\sqrt[3]{x}+x+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{3\times 3}=\frac{1}{9}$$



بهنام آن‌که جان را فکرت آموخت
آزمون دیفرانسیل ۹۰/۰۹/۰۱ دبیر:کشانی

۲۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با ضرب در مزدوج (صورت) داریم:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(\frac{x+5}{x-1}-1\right)}{\sqrt{\frac{x+5}{x-1}}+1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(\frac{6}{x-1}\right)}{2} = \frac{6}{2}=3$$

۲۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to +\infty} g(f(x)) = \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{x}{x+1}\right] = \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{x+1-1}{x+1}\right] = \lim_{x\to +\infty}\left[1-\frac{1}{x+1}\right] = [1-\varepsilon]=0$$

$$g\ \lim f(x) = \left[\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x+1}\right] = [1]=1$$

نکته‌ی درسی: در حالت کلی $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \neq g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$ بلکه شرط برقراری تساوی آن است که تابع $g(x)$ در نقطه‌ای به طول $\lim_{x\to x_0} f(x)$ پیوسته باشد.

۲۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-\tan\pi x}{\tan 4\pi x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{-\pi\left(\tan^2\pi x+1\right)}{4\pi\left(\tan^2 4\pi x+1\right)} = \frac{-2\pi}{4\pi} = -\frac{1}{2}$$

راه دوم: $x-\frac{1}{4}=t\Rightarrow x=t+\frac{1}{4}$

$$\lim_{t\to 0}\left(1-\tan\pi\left(t+\frac{1}{4}\right)\right)\ \cot 4\pi\left(t+\frac{1}{4}\right)=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{\tan\pi t+1}{1-\tan\pi t}}{\tan 4\pi t} \approx \lim_{t\to 0}\frac{\left(1-\frac{\pi t+1}{1-\pi t}\right)}{4\pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{-2\pi t}{1-\pi t}}{4\pi t} = -\frac{1}{2}$$

۲۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f^2(x)+9 = \lim_{a\to a} 6f(x)\ \lim_{x\to a}\left(f^2(x)-6f(x)+9\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-3)^2=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=3 \Rightarrow \lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{3}$$

۲۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \mathrm{Sig}(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

با توجه به تعریف تابع علامت تنها دنباله‌هایی مورد نظر هستند که یکی از آن‌ها دارای جملات مثبت و دیگری دارای جملات منفی باشد. نکته‌ی درسی: اگر $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = a$

$\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(b_n) \Rightarrow$ تابع $f$ در $x = a$ حد ندارد